

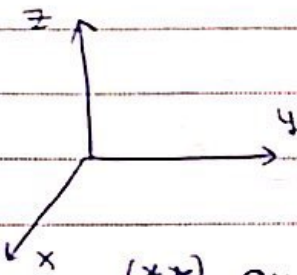
09/05/19



$$(*) \quad a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + c = 0$$

Πρόβλημα: II (*) στο Oxy να παριστάνει;

Πρόβλημα: II (**) να παριστάνει στο χώρο



$$(**) \quad a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + b_1x + b_2y + b_3z + c = 0$$

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = (x \ y) \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^t A x$$

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz =$$

$$= \underbrace{(x \ y \ z)}_{x^t} \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{x}$$

Τετραγωνικές μορφές

Ορισμός:

Έστω V n -διάστατος $\mathbb{R}$ -χώρος πάνω στο $\mathbb{R}$ ($V = \mathbb{R}^2$ ή $\mathbb{R}^3$)

Κάθε τετραγωνική μορφή επί του V καθε συνάρτηση

$$q: V \rightarrow \mathbb{R} \text{ με } q(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j \quad \forall x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$$

όπου $A = (a_{ij})$ είναι $n \times n$ συμμετρικός $n \times n$ πίνακας και $x_1, \dots, x_n$ είναι οι συντεταγμένες του x ως προς τη βάση $\{e_1, \dots, e_n\}$ του V

Ο πίνακας $A = (a_{ij})$ καλείται πίνακας της τετραγωνικής μορφής q ως προς την βάση $\{e_1, \dots, e_n\}$ του V

$$q(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j = X^t A X$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Ερώτηση: Πως αλλάζει ο πίνακας της q αν αλλάσω βάση;

Θεωρώ νέα βάση $\{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n\}$ του V και $P = (p_{ij})$ είναι ο πίνακας μεταβάσεως από την $\{e_1, \dots, e_n\}$ στην $\{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n\}$

$$\tilde{e}_i = \sum_{j=1}^n p_{ji} e_j$$

$$x = \sum_{i=1}^n \tilde{x}_i e_i$$

$$x = \sum_{i=1}^n \tilde{x}_i \tilde{e}_i \quad (1)$$

$$x = \sum_{i=1}^n \tilde{x}_i \tilde{e}_i = \sum_{i=1}^n \tilde{x}_i \sum_{j=1}^n p_{ji} e_j = \sum_{i,j=1}^n \tilde{x}_i p_{ji} e_j = \sum_{i,j=1}^n \tilde{x}_i p_{ij} e_i$$

$$\Rightarrow x = \sum_i \left(\sum_j P_{ij} \tilde{x}_j \right) e_i \quad (2) \Rightarrow x_i = \sum_{j=1}^n P_{ij} \tilde{x}_j, \quad i=1, \dots, n$$

$$\Rightarrow \boxed{x = P \tilde{x}} \quad q(x) = x^t A x = (P \tilde{x})^t A (P \tilde{x}) = (\tilde{x} P^t) A (P \tilde{x}) = \tilde{x} (P^t A P) \tilde{x}$$

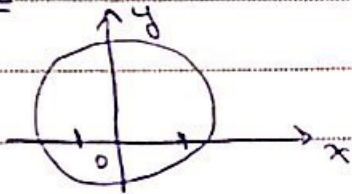
Συμπέρασμα:

Ο πίνακας της q ως προς την νέα βάση είναι $\tilde{A} = P^t A P$

Ερώτηση:

Αόριστος τετραγωνικός μορικός, υπάρχει βάση ώστε ο πίνακας να είναι διαγώνιος;
 ή ισοδύναμα υπάρχει πίνακας P αντιστρέψιμος ώστε $P^t A P = D =$ διαγώνιος πίνακας;

π.χ



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \Leftrightarrow x^t A x = 1$$

$$x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1/a^2 & 0 \\ 0 & 1/b^2 \end{pmatrix}$$

Θεώρημα

Κάθε πραγματικός συμμετρικός πίνακας $n \times n$ έχει n ακεραίους πραγματικούς ιδιοτιμές

Γνωρίζουμε ότι οι ιδιοτιμές $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ενός πίνακα A είναι οι ρίζες του παρατηρησιώδη πολυωνυμίου $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_{nn}) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}$

Θεωρία:

Έστω A κυβικός πίνακας $n \times n$ με τιμές $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ τότε υπάρχει ορθογώνιος $n \times n$ πίνακας P τέτοιος ώστε:

$$P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$(P^{-1})^t = P^t$$

$$\tilde{e}_i = \sum_{j=1}^n P_{ji} e_j$$

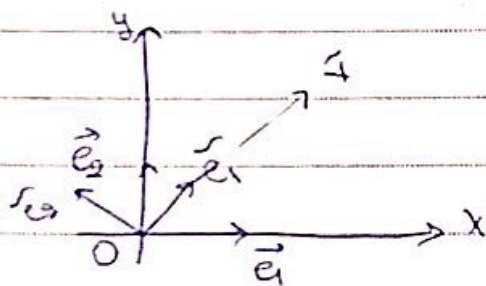
$$\begin{cases} x = \sum \tilde{x}_i \tilde{e}_i \\ x = P \tilde{x} \end{cases}$$

Επειδή P ορθογώνιος οι $\{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n\}$ είναι ορθοκανονικά

$$q(x) = x^t A x = (P \tilde{x})^t A (P \tilde{x}) = \tilde{x}^t (P^t A P) \tilde{x} = \tilde{x}^t D \tilde{x}$$
$$= (\tilde{x}_1 \dots \tilde{x}_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{pmatrix}$$

$$q(x) = \lambda_1 \tilde{x}_1^2 + \dots + \lambda_n \tilde{x}_n^2$$

Πρόβλημα



Τι παριστάνει η $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + c = 0$?

Εξετάζω την περίπτωση όπου $b_1 = b_2 = 0$

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + c = 0 \Leftrightarrow x^t A x + c = 0, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow q(\tilde{x}) + c = 0, \tilde{x} = x\tilde{e}_1 + y\tilde{e}_2$$

$$x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Έστω P 2×2 ορθός πίνακας ως εξής $P^t A P = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, λ_1, λ_2 ιδιοτιμές του A

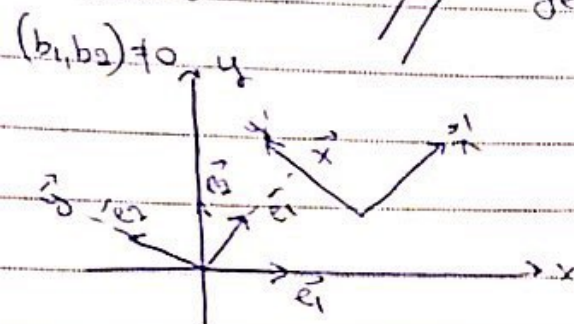
$$\tilde{e}_i = \sum_{j=1}^2 p_{ji} \tilde{e}_j, \quad \{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2\} \text{ ορθ. βάση}$$

Η εξίσωση ως προς το σύγ. γράφεται: $\lambda_1 \tilde{x}^2 + \lambda_2 \tilde{y}^2 + c = 0$

$$\lambda_1 \lambda_2 = \det A$$

- $\lambda_1 \lambda_2 > 0 \Rightarrow$ ελλειψη, κύκλος, $\emptyset$
- $\lambda_1 \lambda_2 < 0 \Rightarrow$ υπερβολή, $X \leadsto$ ζευγος ασυμμετρικών ευθειών.

- $\lambda_1 \lambda_2 = 0 \Rightarrow //$ ζευγος παραλλήλων, $\emptyset$



$$\lambda_1 \tilde{x}^2 + \lambda_2 \tilde{y}^2 + \tilde{b}_1 \tilde{x} + \tilde{b}_2 \tilde{y} + c = 0$$

$$\lambda_1 (\tilde{x} - a)^2 + \lambda_2 (\tilde{y} - b)^2 = C'$$

Άσκηση

Τι περιγράφει η εξίσωση $5x^2 - 6xy + 5y^2 = 8$ στο επίπεδο Oxy ?

Λύση

Θεωρώ την τετραγωνική μορφή $q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$q(x, y) = 5x^2 - 6xy + 5y^2 = X^t A X \text{ όπου } A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \text{ είναι}$$

ο πίνακας της q ως προς την βάση

$$\{\tilde{e}_1 = (1, 0), \tilde{e}_2 = (0, 1)\} \text{ και } X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι $\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 \\ -3 & 5-\lambda \end{vmatrix}$

$$= (5-\lambda)^2 - 3^2 = (5-\lambda-3)(5-\lambda+3) = (2-\lambda)(8-\lambda)$$

Άρα οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι $\lambda_1 = 8, \lambda_2 = 2$

Υπολογίζω τον ιδιοχώρο V_{λ_1}

$$(A - \lambda_1 I_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x+y=0$$

$$V_{\lambda_1} = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / x+y=0 \}$$

$$V(\lambda_1) = \{ (x, -x) / x \in \mathbb{R} \} = \{ x(1, -1) / x \in \mathbb{R} \}$$

Προφανώς $\tilde{c}_1 = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ είναι ορθ. βάση του $V(\lambda_1)$

Υπολογίζω τον ιδιοχώρο V_{λ_2}

$$(A - \lambda_2 I_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} +3 & -3 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$x=y$$

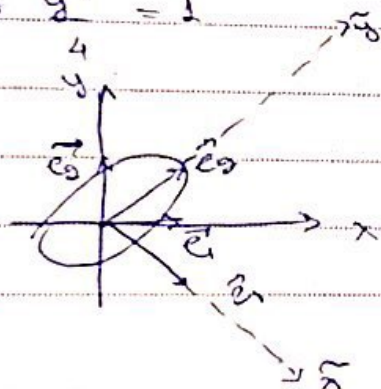
$$V_{\lambda_2} = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / x=y \} = \{ x(1, 1) / x \in \mathbb{R} \}$$

$\tilde{c}_2 = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ είναι ορθ. βάση του V_{λ_2}

$\{ \tilde{e}_1, \tilde{e}_2 \}$ είναι ορθ. βάση

$$5x^2 - 6xy + 5y^2 = 8 \Leftrightarrow \lambda_1 \tilde{x}^2 + \lambda_2 \tilde{y}^2 = 8 \Leftrightarrow 8\tilde{x}^2 + 2\tilde{y}^2 = 8 \Leftrightarrow$$

$$\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 = 1$$



$$\boxed{\frac{\tilde{x}^2}{1^2} + \frac{\tilde{y}^2}{1^2} = 1}$$

Λέν

παριστάει η εξίσωση (*) $2x^2 + 3xy - 2y^2 = 10$ στο επίπεδο xy .

Λέν

(*) $\Leftrightarrow q(x,y) = 10$ όπου $q: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ είναι η τετραγωνική μορφή
 $q(x,y) = X^t A X$ με $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ και πινάκα $A = \begin{pmatrix} 2 & 3/2 \\ 3/2 & -2 \end{pmatrix}$ ως προς
την βάση $\{\vec{e}_1 = (1,0), \vec{e}_2 = (0,1)\}$.

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3/2 \\ 3/2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \dots = (\lambda - 5/2)(\lambda + 5/2)$$

Άρα οι ιδιοτιμές του A είναι $\lambda_1 = 5/2, \lambda_2 = -5/2$

Υπολογίζω τον ιδιοχώρο V_{λ_1}

$$(A - \lambda_1 I_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \frac{1}{3} x = y$$

$$V_{\lambda_1} = \{x(3,1) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

Το $\tilde{e}_1 = (3/\sqrt{10}, 1/\sqrt{10})$ είναι ορθή βάση του V_{λ_1} .

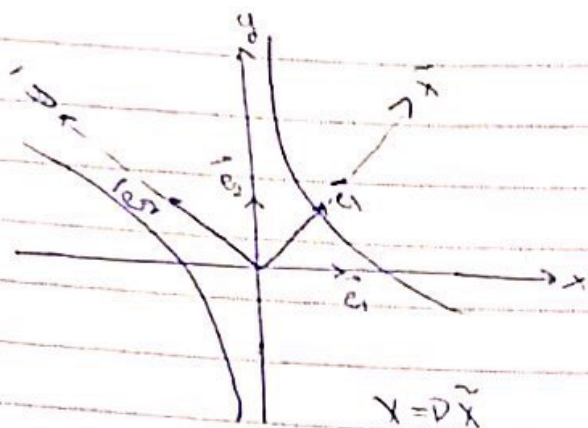
$$\text{Ομοίως } V_{\lambda_2} = \{x(1,3) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

Το $\tilde{e}_2 = (-1/\sqrt{10}, 3/\sqrt{10})$ είναι ορθή βάση του V_{λ_2} .

$\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2\}$ είναι ορθή βάση του $\mathbb{R}^2$ (Σίμμετρική)

$$(*) \Leftrightarrow q(x,y) = 10 \Leftrightarrow \lambda_1 \tilde{x}^2 + \lambda_2 \tilde{y}^2 = 10 \Leftrightarrow \frac{5}{2} \tilde{x}^2 - \frac{5}{2} \tilde{y}^2 = 2 \cdot 5$$

$$\Rightarrow \frac{\tilde{x}^2}{2} - \frac{\tilde{y}^2}{2} = 1$$



Υπερβολή με ασυμπτώτες

$$\frac{\tilde{x}}{2} - \frac{\tilde{y}}{2} = 0, \quad \frac{\tilde{x}}{2} + \frac{\tilde{y}}{2} = 0$$

$P^T A P = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -5/2 \end{pmatrix}$ οπότε P είναι ο πίνακας μετασχηματισμού
 από την βάση $\{\vec{e}_1 = (1, 0), \vec{e}_2 = (0, 1)\}$ στη βάση
 $\{\tilde{\vec{e}}_1 = (3/\sqrt{10}, 1/\sqrt{10}), \tilde{\vec{e}}_2 = (-1/\sqrt{10}, 3/\sqrt{10})\}$

$$\tilde{\vec{e}}_1 = \sum_{j=1}^2 p_{ji} \vec{e}_j$$

$$\tilde{\vec{e}}_1 = \frac{3}{\sqrt{10}} \vec{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{10}} \vec{e}_2$$

$$P = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{10} & -1/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\vec{e}}_2 = -\frac{1}{\sqrt{10}} \vec{e}_1 + \frac{3}{\sqrt{10}} \vec{e}_2$$

Άσκηση

Τι πολλαπλασιάζει η εξίσωση $-x^2 - y^2 - z^2 + 2xy + 2xz + 2yz = 3$ με
 Grov χώρο $Oxyz$;

Λύση

$(*) \Rightarrow q(x, y, z) = 3$, οπότε $q: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ είναι η εσφαλμένη
 λύση $q(x, y, z) = X^T A X$
 οπότε $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ και $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ είναι ο πίνακας της

ως προς τη βάση $\{\vec{e}_1 = (1, 0, 0), \vec{e}_2 = (0, 1, 0), \vec{e}_3 = (0, 0, 1)\}$

το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι:

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & -1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 2 \\ 3-\lambda & -1-\lambda & 2 \\ 3-\lambda & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (3-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1-\lambda & 2 \\ 1 & 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -3-\lambda \end{vmatrix}$$

$$\chi_A(\lambda) = (3-\lambda)(\lambda+3)^2$$

Αρα οι ιδιοτιμές είναι

$$\lambda_1 = 3 \text{ (απλ.)}, \lambda_2 = -3 \text{ (διπλ.)}$$

Ιδιοχώρος V_{λ_1}

$$V_{\lambda_1} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (A - \lambda_1 I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{matrix} -4x + 2y + 2z = 0 \\ 2x - 4y + 2z = 0 \\ 2x + 2y - 4z = 0 \end{matrix} \right\}$$

$$V_{\lambda_1} = \{ (x, x, x) \mid x \in \mathbb{R} \} = \{ x(1, 1, 1) \mid x \in \mathbb{R} \}$$

$\tilde{e}_1 = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ είναι ορθ. βάση του

$$\textcircled{0} \text{ ιδιοχώρος } V_{\lambda_2} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (A - \lambda_2 I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 2y + 2z = 0 \right\}$$

$$= \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = -y - z \right\}$$

$$= \left\{ (-y-z, y, z) \mid y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

$V_{\lambda_2} = \{ y(-1, 1, 0) + z(-1, 0, 1) \mid y, z \in \mathbb{R} \}$
 Αρα τα διανυσματα $\{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$ είναι βάση του V_{λ_2}

$\{(-1, 1, 0), (-1, 0, 1) - \text{Προβ}(-1, 0, 1)_{(-1, 1, 0)}\}$ ορθογώνια βάση

$$\text{Προβ}_{(-1, 1, 0)}(-1, 0, 1) = 1/2(-1, 1, 0)$$

~~Παρατήρηση~~

Τα διανυσματα $(-1, 1, 0), (-1/2, -1/2, 1)$ είναι ορθογ. βάση του V_{λ_2}
 Συνεπώς τα διανυσματα

$$\tilde{e}_2 = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0), \tilde{e}_3 = (-1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, \frac{2}{\sqrt{3}})$$

είναι ορθογ. βάση του V_{λ_2}

Αρα $\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \tilde{e}_3\}$ είναι ορθογ. βάση του $\mathbb{R}^3$

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{3} \end{pmatrix} \quad \det P = 1$$

$$P^t A P = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 \tilde{x}^2 + \lambda_2 \tilde{y}^2 + \lambda_3 \tilde{z}^2 = 3 \Leftrightarrow 3\tilde{x}^2 - 3\tilde{y}^2 - 3\tilde{z}^2 = 3$$

$$\Leftrightarrow \tilde{x}^2 - \tilde{y}^2 - \tilde{z}^2 = 1$$

